$2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}=k \Leftrightarrow f(x)=k.$

Graphiquement on a :

*/ si $k=2\ln\dfrac{1}{2}-1$ ou $k=2\ln 2+2$

On a une seule solution.

*/ si $k\in\left]2\ln\dfrac{1}{2}-1;2\ln 2+2\right[$.

Aucune solution.

*/ si $k>2\ln 2+2$ ou $k<2\ln\dfrac{1}{2}-1$

On a deux solutions.

Exercice 13

$f(x)=e^x+e^{-x}-2 \qquad g(x)=e^x-e^{-x}$

$D_f=\square \quad , \quad D_g=\square .$

1) Variations de f:

$f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+e^{-x}-2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+e^{-x}-2=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Variations de g :

$g'(x)=e^x+e^{-x}>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-e^{-x}=-\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Rmq : on pourra remarquer que :

*/ f est une fonction paire.

*/ g est une fonction impaire.

Donc l'étude peut se faire seulement sur $[0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{e^{-x}}{x}-\dfrac{2}{x}$

$=+\infty+0-0=+\infty$

C_f admet une B.I.P de direction $\left(o,\vec{j}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x}=+\infty-\dfrac{0}{+\infty}=+\infty$

C_g admet une B.I.P de direction $\left(o,\vec{j}\right)$.

(Rmq : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$)

3)a) g est continue et strictement croissante sur IR

Donc g est une bijection de $\square$ sur $\square$.

b) g est dérivable sur $\square$ et $g'(x)\neq 0, \forall x\in\square$.

Donc g^{-1} est dérivable sur $\square$.

c) $1,5\in\square$ donc g^{-1} est dérivable en 1,5 et $\left(g^{-1}\right)'(1,5)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(1,5)\right)}$

Or $g^{-1}(1,5)=x\Leftrightarrow g(x)=1,5$

$e^x-e^{-x}=1,5\Leftrightarrow e^{2x}-1=\dfrac{3}{2}e^x$

$\Leftrightarrow e^{2x}-\dfrac{3}{2}e^x-1=0$

$\Delta=\dfrac{9}{4}+4=\dfrac{25}{4}, \sqrt{\Delta}=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{cases} e^x=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{8}{4}=2 \\ ou \\ e^x=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}, imp \end{cases}$$

Donc $e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$ et par suite